「平成 31 年度 入学試験問題 教員養成課程　数 学　解答例」

問題1（配点60点）

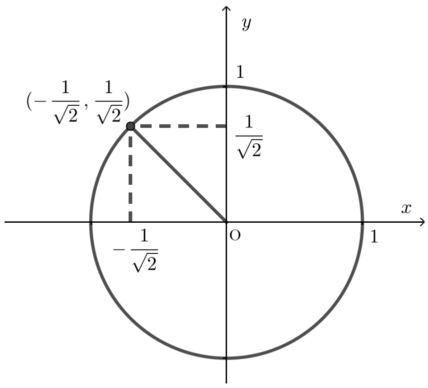
（以下に示す解答例はあくまで一例にすぎません）

(1) の解答例

角 θ の動径と単位円の交点の座標を (p, q) とするとき, $\cos\theta = p$ である。

$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ の動径と単位円の交点の座標は下図のように $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となるので,

$\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。



(2) の解答例

$t = \cos x$ とおくとき, $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ より $-1 \leqq t \leqq 0$ である。

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ と $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より,

$$y = \sin x \sin 2x + \cos x = (2\sin^2 x + 1)\cos x = \left\{2(1-t^2)+1\right\}t = -2t^3 + 3t$$

となる。

(3) の解答例

$y' = -6t^2 + 3 = -3(2t^2 - 1)$ より, $-1 \leqq t \leqq 0$ における y の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	極小 $-\sqrt{2}$	$\nearrow$	0

よって, $t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, すなわち $x = \dfrac{3\pi}{4}$ のときに y は最小値 $-\sqrt{2}$ をとり,

$t = 0$, すなわち $x = \dfrac{\pi}{2}$ のときに y は最大値 0 をとる。

「平成 31 年度 入学試験問題 教員養成課程　数 学　解答例」

問題2（配点70点）

（以下に示す解答例はあくまで一例にすぎません）

(1) の解答例

△ABP の頂点 A, B, P から対辺またはその延長に, それぞれ垂線 AA′, BB′, PP′ を下ろす。
直線 AA′ は A(1, 0) を通り $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = (s-2, t)$ と直交するので, 方程式は

$$(s-2)(x-1)+ty=0 \qquad \cdots ①$$

となる。直線 BB′ は B(2, 0) を通り $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (s-1, t)$ と直交するので, 方程式は

$$(s-1)(x-2)+ty=0 \qquad \cdots ②$$

となる。直線 PP′ の方程式は $x=s$ ($\cdots$③) である。
直線 ② と ③ の交点の座標は $\left(s, -\dfrac{(s-1)(s-2)}{t}\right)$ であるが, 直線 ① も同じ点を通る。
よって, 垂線 AA′, BB′, PP′ は 1 点 $\mathrm{H}\left(s, -\dfrac{(s-1)(s-2)}{t}\right)$ で交わる。

(2) の解答例

(1) で求めた H の座標に $t=\dfrac{1}{s}$ を代入して, $s=x$ とすれば,
点 H の軌跡の方程式は $y=-x(x-1)(x-2)$ となる。

(3) の解答例

関数 $y=-x(x-1)(x-2)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形は,
$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で x 軸の上側にある。よって, その面積を定積分で表せば,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(-x^3+3x^2-2x\right)dx &= \left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{16}{4}+8-4\right)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

問題3（配点70点）

（以下に示す解答例はあくまで一例にすぎません）

(1) の解答例

n 回目の移動のあとに, 点 P が頂点 B にあって次に頂点 A に移動する確率は $b_n \times \dfrac{1}{2}$,

点 P が頂点 C にあって次に頂点 A に移動する確率は $c_n \times \dfrac{1}{2}$ である。

n 回目の移動のあとに点 P が頂点 A にあって, 次に頂点 A に移動することはない。

よって, $n+1$ 回目の移動のあとに点 P が点 A にある確率は

$$a_{n+1} = b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{b_n + c_n}{2}$$

となる。

(2) の解答例

$n=1$ のとき, $b_1 = c_1 = \dfrac{1}{2}$ であるから成り立つ。$n=k$ のとき, $b_k = c_k$ であるとする。

(1) と同様に,

$$b_{k+1} = \frac{a_k + c_k}{2}, \quad c_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$$

が成り立つ。$b_k = c_k$ より, $b_{k+1} = c_{k+1}$ となる。

よって, 数学的帰納法により, すべての自然数 n について $b_n = c_n$ が成り立つ。

(3) の解答例

点 P は三角形のいずれかの頂点には必ずあるので, $a_n + b_n + c_n = 1$,

すなわち, $b_n + c_n = 1 - a_n$ である。(1) より, $a_{n+1} = \dfrac{1-a_n}{2}$ となる。

$a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$ と変形できるので, $\left\{a_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $-\dfrac{1}{3}$, 公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

よって, $a_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となる。

(4) の解答例

$a_n + b_n + c_n = 1$ と $b_n = c_n$ より, $b_n = \dfrac{1-a_n}{2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となるので,

$|a_n - b_n| = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ である。

$|a_n - b_n| < \dfrac{1}{10^5}$, すなわち, $2^n > 10^5$ となる最小の n は,

両辺の対数を計算して, $\dfrac{5}{0.3010} = 16.61\cdots$ から, $n = 17$ であることが分かる。