

平成31年度 北海道教育大学札幌校
編入学試験 問題用紙

教員養成課程 理数教育専攻 算数・数学教育分野

平成30年11月25日

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまでは、この表紙を開かないこと。
- 2 この問題用紙は1枚、解答用紙は3枚、下書き用紙は1枚あります。
- 3 「問題1」「問題2」「問題3」すべてに解答すること。
- 4 解答用紙は、「問題1」「問題2」「問題3」ともに1枚あります。
- 5 受験番号は、解答用紙の指定欄に記入すること。
- 6 解答用紙3枚を提出し、表紙・問題用紙・下書き用紙は、試験終了後持ち帰ること。なお、いかなる理由があっても解答用紙以外は受理しません。
- 7 試験中に、問題用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により交換を必要とする場合は、手をあげて監督者に知らせること。

専門科目 (1/1)

問題 1. A と B を空でない集合とし, $f: A \rightarrow B$ を写像とする. A 上の同値関係 \sim を, $a, b \in A$ に対して $a \sim b \iff f(a) = f(b)$ となるものと定める. A/\sim によって A の \sim による商集合を表し, $g: A \rightarrow A/\sim$ を, $a \in A$ に対して a を含む同値類を対応させる写像とする. 次の問いに答えよ。(100 点)

- (1) 商集合 A/\sim から集合 B への写像 $h: A/\sim \rightarrow B$ で $f = h \circ g$ となるものが唯一つ存在することを証明せよ。
- (2) (1) で得られた写像 h は単射であることを証明せよ。
- (3) もし f が全射ならば (1) で得られた写像 h は全射であることを証明せよ。

問題 2. 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するとは, 任意の正の数 M に対して条件「 $n \geq N$ ならば $a_n \geq M$ 」を満たすような自然数 N が存在することである。以下の問いに答えよ。(100 点)

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するとき, $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ により定めた数列 $\{b_n\}$ も正の無限大に発散することを示せ。
- (2) $c_n = (n!)^{1/n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とする。(1) で示したことを用いて, 数列 $\{c_n\}$ の収束・発散について調べよ。
- (3) 「数列 $\{a_n\}$ が有限の値に収束しなければ, $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ により定めた数列 $\{b_n\}$ も有限の値に収束しない」という命題は誤りである。反例となる具体的な例を 1 つ答えて説明せよ。

問題 3. \mathbb{R}^4 のベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

について次の各問いに答えよ。(100 点)

- (1) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ が一次独立かどうか判定せよ。一次独立でないならば一次の関係式を一つ与えよ。
- (2) V を \vec{a}_1, \vec{a}_2 で生成されるベクトル空間, W を \vec{a}_3, \vec{a}_4 で生成されるベクトル空間とするとき, 共通部分 $V \cap W$ の次元を求めよ。