平成30年度入学試験問題

数　学

（教員養成課程）

注 意 事 項

1　試験開始の合図があるまでは，この問題冊子を開かないこと。

2　問題冊子は表紙を含めて１～３ページです。

3　解答用紙は３枚，計算用紙は１枚です。

4　解答は指定された解答用紙に記入すること。裏面には何も書かないこと。

5　受験番号は解答用紙の指定欄に記入すること。

6　解答は，答えだけではなく，計算の過程や説明も書くこと。

7　解答用紙のみを提出し，問題冊子・計算用紙は試験終了後，持ち帰ること。なお，いかなる理由があっても解答用紙以外（計算用紙など）は受理しません。

8　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等により交換を必要とする場合は，手を挙げて監督者に知らせること。

問題 1 (70 点)

$f(x)=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{4}{3}x$ とする。曲線 $y=f(x)$ の点 $\mathrm{A}(p,\ f(p))$ における接線を ℓ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$p>0$ とする。

(1) x 軸の $x \geqq 0$ の部分と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と接線 ℓ の共有点のうち，点 A と異なる点を B とする。点 B の x 座標を p を用いて表せ。

(4) (3) の点 B における曲線 $y=f(x)$ の接線を m とする。ℓ と m が垂直に交わるときの p の値を求めよ。

問題 2 (70 点)

$\triangle\mathrm{PAB}$ において，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{b}$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\theta=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$$

(2) 3 点 P, A, B の座標がそれぞれ $(0,\ 0)$, $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$ であるとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積は $\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$ となることを示せ。

(3) t を実数とする。3 点 P, A, B の座標がそれぞれ $(-4,\ 1)$, $(t,\ 0)$, $(0,\ t+7)$ であるとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積の最小値を求めよ。

問題 3 (60点)

p, q を正の整数とする。座標平面上の点 $\left(\dfrac{p}{q},\ \dfrac{1}{2q^2}\right)$ を中心とし，x 軸と接する円を $C_{p,q}$ で表すことにする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，以下では m, n も正の整数とする。

(1) $\dfrac{p}{q} < \dfrac{m}{n}$ とする。$qm - pn = 1$ であることは，2つの円 $C_{p,q}$ と $C_{m,n}$ が外接するための必要十分条件であることを示せ。

(2) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{m}{n}$ のとき，(1) を用いて，2つの円 $C_{2,4}$ と $C_{m,n}$ が外接しないことを示せ。

(3) $\dfrac{79}{145} < \dfrac{m}{n}$ のとき，(1) を用いて，2つの円 $C_{79,145}$ と $C_{m,n}$ が外接するような円 $C_{m,n}$ のうち，$n \leqq 300$ の範囲で n が最大であるものを求めよ。