令和６年度入学試験問題

数　学

（教員養成課程）

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまでは，この問題冊子を開かないこと。

2　問題冊子は表紙を含めて１～３ページです。

3　解答用紙は３枚，計算用紙は１枚です。

4　解答は指定された解答用紙に記入すること。**裏面には何も書かないこと。**

5　受験番号は解答用紙の指定欄に記入すること。

6　解答は，答えだけではなく，計算の過程や説明も書くこと。

7　解答用紙のみを提出し，問題冊子・計算用紙は試験終了後，持ち帰ること。**なお，いかなる理由があっても解答用紙以外（計算用紙など）は受理しません。**

8　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等により交換を必要とする場合は，手を挙げて監督者に知らせること。

問題 1 (60 点)

放物線 $y = x^2$ を C_1 とし, C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{p^2}{4}\right)$ における C_1 の接線を ℓ とする。ただし, p は正の整数とする。また, 放物線 $y = -x^2 + 3x - 2$ を C_2 とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 直線 ℓ と放物線 C_2 が 2 つの共有点をもつための p の条件を求めよ。

(3) (2) で求めた条件を満たす最小の p について, 直線 ℓ と放物線 C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

問題 2 (70 点)

1 個のさいころを 2 回投げるとき, 出た目の数を順に m, n とする。このとき, 2 次方程式

$$x^2 + mx + n = 0$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。

(2) この 2 次方程式が重解をもつ確率を求めよ。

(3) この 2 次方程式の 2 つの解 x_1, x_2 に対して, $x_1 - x_2$ が整数となる確率を求めよ。ただし, 重解の場合は $x_1 = x_2$ と考える。

(4) この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解 x_1, x_2 をもつとする。このとき, $x_1 - x_2$ が整数となる確率を求めよ。

問題 3 (70 点)

$\triangle A_1B_1C_1$ の辺 B_1C_1 の中点を A_2, 辺 C_1A_1 の中点を B_2, 辺 A_1B_1 の中点を C_2 として, $\triangle A_2B_2C_2$ をつくる。

$n = 2, 3, \cdots$ のときも同様に, $\triangle A_nB_nC_n$ の辺 B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n の中点を, それぞれ, A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} として, $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ をつくる。

$\triangle A_1B_1C_1$ の面積を 1 とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\triangle A_nB_nC_n$ の面積を n を用いて表せ。

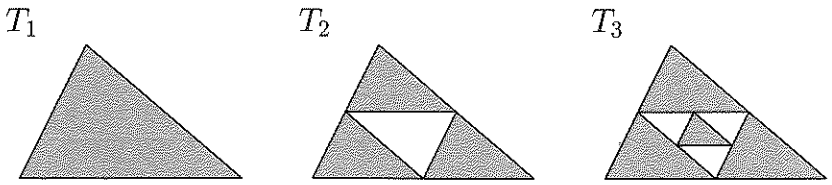
(2) 初項 a, 公比 r $(r \neq 1)$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 数列 $\{T_n\}$ を次のように定める。

- 最初に, $\triangle A_1B_1C_1$ の内部を黒く塗り, その面積を T_1 とする。
- 次に, $\triangle A_2B_2C_2$ の内部を白く塗り, このとき黒く塗られているすべての部分の面積の和を T_2 とする。
- 次に, $\triangle A_3B_3C_3$ の内部を黒く塗り, このとき黒く塗られているすべての部分の面積の和を T_3 とする。
- 以下順に, $n = 4, 5, \cdots$ のとき, $\triangle A_nB_nC_n$ の内部を, n が偶数ならば白く塗り, n が奇数ならば黒く塗って, このとき黒く塗られているすべての部分の面積の和を T_n とする。

このとき, T_n を n を用いて表せ。

(4) (3) の T_n について, $\left|T_n - \frac{4}{5}\right| < \frac{1}{10^{12}}$ を満たす最小の n を求めよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.301$ としてよい。