問題 1 （配点60点）

---

(1) の解答例

$y=x^2$ を微分して $y'=2x$ となるので, $x=\dfrac{p}{2}$ のときの傾きは p である。

$$p\left(x-\frac{p}{2}\right)+\frac{p^2}{4}=px-\frac{p^2}{4}$$

よって, ℓ の方程式は $y=px-\dfrac{p^2}{4}$ となる。

(2) の解答例

条件を満たすには, $px-\dfrac{p^2}{4}=-x^2+3x-2$, すなわち $x^2+(p-3)x+2-\dfrac{p^2}{4}=0$ $(*)$ が異なる実数解を持てばよい。

判別式の条件は $D=(p-3)^2-4\left(2-\dfrac{p^2}{4}\right)=2p^2-6p+1>0$, よって $p<\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$ または $p>\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ となる。

$2<\sqrt{7}<3$ より, $\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}<\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{5}{2}<\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}<3$ に注意して,

ℓ の傾き p は正整数なので, p は3以上の整数であればよい。

(3) の解答例

$p=3$ のとき ℓ の方程式は $y=3x-\dfrac{9}{4}$ である。

ℓ と C_2 との交点の x 座標は, $(*)$ に $p=3$ を代入した $x^2-\dfrac{1}{4}=0$ より $x=\pm\dfrac{1}{2}$ となる。

このとき, 面積 S は

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(-x^2+3x-2\right)-\left(3x-\frac{9}{4}\right)\right\}dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx=-2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

となる。

問題 2 （配点 70 点）

(1) の解答例

2 次方程式 $x^2+mx+n=0$ が異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件は, 判別式を D とするとき

$$D=m^2-4n>0$$

を満たすことである。m, n と D の関係を表にすると

$m\backslash n$	1	2	3	4	5	6
1	-3	-7	-11	-15	-19	-23
2	0	-4	-8	-12	-16	-20
3	5	1^*	-3	-7	-11	-15
4	12	8	4^*	0	-4	-8
5	21	17	13	9^*	5	1^*
6	32	28	24	20	16^*	12

となる。よって, $D=m^2-4n>0$ を満たす (m,n) の組は

$(3,1)$, $(3,2)$,
$(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$,
$(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,5)$, $(5,6)$,
$(6,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$ の 17 通りになる。

(m,n) の組は全部で 36 通りあるので, 求める確率は $\dfrac{17}{36}$ となる。

(2) の解答例

$x^2+mx+n=0$ が重解をもつための必要十分条件 $D=m^2-4n=0$ を満たす (m,n) の組は
$(2,1)$, $(4,4)$ の 2 通り, よって重解をもつ確率は $\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$ となる。

(3) の解答例

2 次方程式 $x^2+mx+n=0$ の 2 つの解を x_1, x_2 とするとき, $x_1-x_2=\pm\sqrt{m^2-4n}$ である。
$\pm\sqrt{m^2-4n}$ が整数となるには, $D=m^2-4n$ が平方数であればよく,
(1) の (m,n) の組のうち, 表中の D の値に $*$ を付した, $(3,2)$, $(4,3)$, $(5,4)$, $(5,6)$, $(6,5)$ の 5 通りと,
(2) の $(2,1)$, $(4,4)$ の 2 通りの, 合計 7 通りになる。よって, 求める確率は $\dfrac{7}{36}$ となる。

(4) の解答例

2 次方程式 $x^2+mx+n=0$ について,
「異なる 2 つの実数解をもつ」という事象を A, 「解 x_1, x_2 の差 x_1-x_2 は整数である」という事象を B とする。
求めるべき確率は, 事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率 $P_A(B)$ であり,
事象 A の起こる場合の数が $n(A)=17$, 事象 $A\cap B$ の起こる場合の数が $n(A\cap B)=5$ なので, 求める確率は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{5}{17}\qquad\left(\text{または } P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5}{36}\div\frac{17}{36}=\frac{5}{17}\right)$$

となる。

問題 3 （配点 70 点）

---

(1) の解答例

自然数 k に対して,
中点連結定理により $\triangle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ は $\triangle A_kB_kC_k$ と相似で, $A_{k+1}B_{k+1} : A_kB_k = 1 : 2$ である。
よって, $\triangle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ の面積は $\triangle A_kB_kC_k$ の面積の $\dfrac{1}{4}$ 倍になる。
$\triangle A_1B_1C_1$ の面積を 1 とするとき, $\triangle A_nB_nC_n$ の面積は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ となる。

(2) の解答例

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ である。
両辺に公比 r を掛けると $rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n$ となるので, 辺々引いて $S_n - rS_n = a - ar^n$ となる。
$1 - r \neq 0$ なので $(1-r)S_n = a(1-r^n)$ の両辺を $1-r$ で割って $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ を得る。

(3) の解答例

最初に $\triangle A_1B_1C_1$ の内部を黒く塗るので $T_1 = 1$ であり, 次に $\triangle A_2B_2C_2$ の内部を白く塗るので $T_2 = 1 - \dfrac{1}{4}$ となる。
その次に $\triangle A_3B_3C_3$ の内部を黒く塗れば $T_3 = 1 - \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ となる。
n が偶数の場合は $\triangle A_nB_nC_n$ の内部が白く塗られて $T_n = T_{n-1} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ となり,
n が奇数の場合は $\triangle A_nB_nC_n$ の内部が黒く塗られて $T_n = T_{n-1} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ となる。
すなわち, $T_n = 1 - \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ であり, 右辺は初項 1, 公比 $-\dfrac{1}{4}$ の等比数列の
初項から第 n 項までの和となるので, (2) より $T_n = \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{4}{5}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$ である。

(4) の解答例

$\left|T_n - \dfrac{4}{5}\right| = \dfrac{1}{5 \cdot 4^{n-1}}$ である。$\log_{10} 10^{12} = 12$ と $\log_{10}(5 \cdot 4^{n-1}) = \log_{10}(10 \cdot 2^{2n-3}) = 1 + (2n-3)\log_{10} 2$ より
$1 + (2n-3)\log_{10} 2 > 12$, すなわち $2n - 3 > \dfrac{11}{\log_{10} 2}$ を満たす最小の n を求めればよい。
$\log_{10} 2 = 0.301$ として $2n - 3 > 36.5\cdots$, よって $n = 20$ を得る。